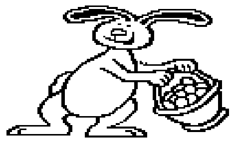
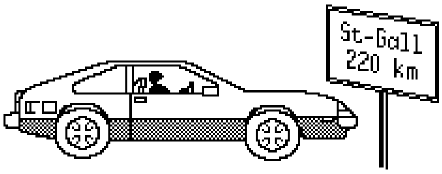
Les grandeurs proportionnelles dans la pratique

Exemples de problèmes :



1. Une douzaine d'oeufs coûtent fr. 6.50.
   Combien coûtent 17 oeufs ?



2. Un automobiliste lausannois se rend à St-Gall.

   Arrivé à Berne, il voit un panneau indiquant : "St-Gall 220 km"

   Combien de temps lui reste-t-il à rouler sachant qu'il a mis 70 minutes pour faire les 97 km qui séparent Lausanne de Berne ?

3. En une journée, 9 ouvriers ont creusé une galerie de 45 mètres.

   Combien d'ouvriers fallait-il engager sur ce chantier pour réaliser une galerie de 65 mètres en une journée ?

<u>Résumé</u> :

1. 12 oeufs valent fr. 6.50
   17 oeufs valent fr. ?

2. ? min pour effectuer 220 km
   70 min pour effectuer 97 km

3. 9 ouvriers creusent 45 mètres
   ? ouvriers creusent 65 mètres

Constatation :

Dans ces problèmes, trois termes d'une proportion sont connus, il s'agit de déterminer le quatrième.

Grandeurs directement proportionnelles

Directement proportionnelles

Ex: 2 mars coûtent fr. 1.–
4 mars ¨ fr. 2.–

Inversement proportionnelles

Ex: En roulant à 60 km/h on met 2 heures pour aller à Berne
En roulant à 120 km/h on met 1 heures pour aller à Berne

Méthode 1 <u>Le raisonnement</u>

a) Rechercher la valeur pour 1 unité cherchée :
12 oeufs coûtent fr. 6.50
1 oeuf coûte 12 x moins, soit fr. (6,5/12)

b) Calculer la valeur pour le nombre d'unités cherchées :
17 oeufs coûtent 17 x 1 oeuf, soit fr. 17 x (6,5/12)

Méthode 2 <u>Coefficient de proportionnalité</u>

12	**17**
Fr. 6.50	**Fr. ?**

0 ,54166

a) Quel nombre permet de passer de 12 à 6,5 ?
6,5/12= 0,54166666

b) Appliquer le coefficient à la valeur cherchée :
0,54166666 x 17

Méthode 3 <u>La règle de trois</u>

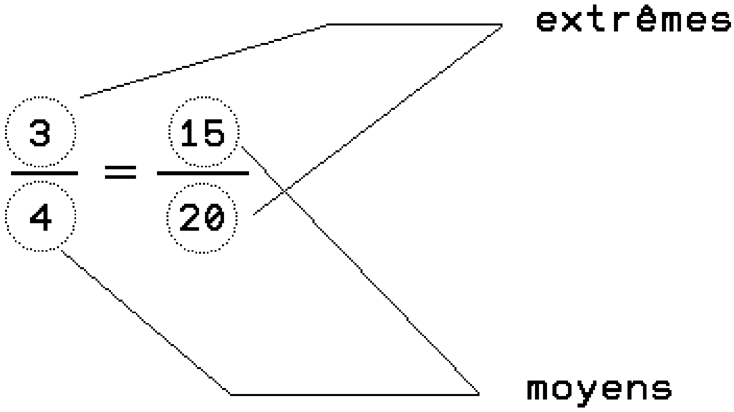
Une proportion est l'égalité de deux rapports

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

3 est à 4 comme 15 est à 20

La proportion contient 4 termes :

le premier (ici 3) et le quatrième (20) sont les extrêmes
le deuxième (4) et le troisième (15) sont les moyens

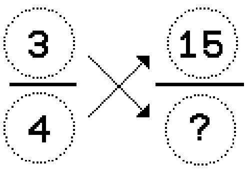


Règle

Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens

3 x 20 = 4 x 15

Dans les problèmes de proportionnalité 3 termes sont connus, il faut déterminer le quatrième



3 x ? = 4 x 20
3 x ? = 60
? = 60/3
? = 20

Finalement, on obtient la réponse cherchée en faisant

$$\frac{\overbrace{4 \times 15}^{\text{série complète}}}{\underbrace{3}_{\text{série incomplète}}}$$

Dans notre exemple :

12 oeufs => fr. 6.50

17 oeufs => fr. ?

$$\boxed{\frac{17 \times 6.50}{12}}$$

Méthode 4 <u>La conjointe</u>

La conjointe est un procédé arithmétique (et non mathématique !!!) très utile lorsque plusieurs règles de trois successives sont nécessaires pour résoudre un problème. Elle se compose d'une suite de rapports où les quantités de gauche sont appelées antécédents et celle de droite conséquents

Marche à suivre :

a) On commence la conjointe en posant la question du problème sous forme d'égalité, le premier terme de la conjointe étant l'inconnue.

b) L'antécédent (premier terme) du deuxième rapport est de même espèce que le conséquent du premier rapport (deuxième terme du premier rapport)

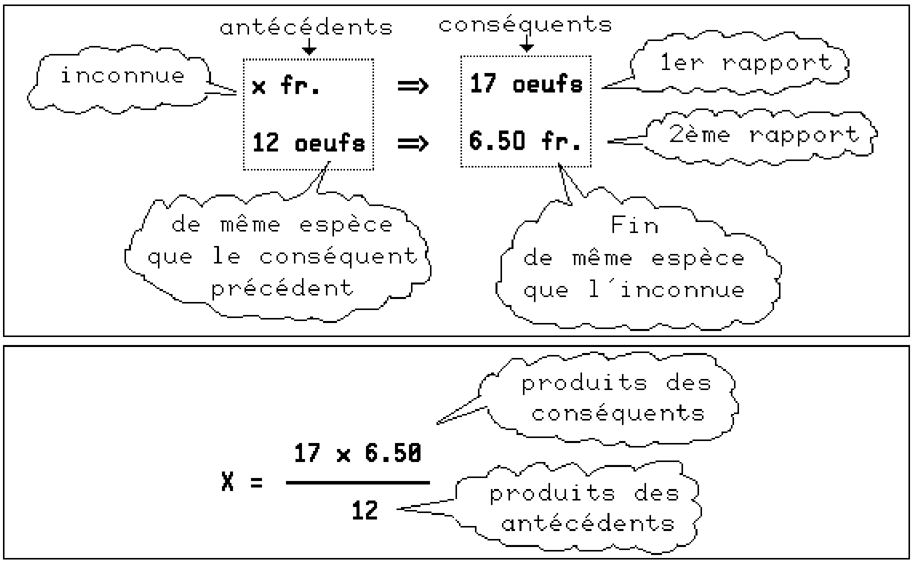
c) L'antécédent (premier terme) du troisième rapport est de même espèce que le conséquent du deuxième rapport (deuxième terme du deuxième rapport), et ainsi de suite ...

d) Le conséquent du dernier rapport est de même espèce que l'inconnue

e) La valeur de l'inconnue (x) s'obtient en divisant le produit des conséquents (termes de droite) par le produits des antécédents (termes de gauche)

$$\boxed{x = \frac{\text{produit des conséquents}}{\text{produit des antécédents}}}$$

Dans notre exemple :



Exemple plus probant !

De l'avoine canadienne est importée au prix d'achat (PA) de 15 $ le boisseau. Quel est le prix de revient d'achat (PRA) en Suisse du quintal, sachant que les frais d'achat s'élèvent à 10 % du prix d'achat ?

Renseignements : 1 $ can vaut fr. 1.60
1 boisseau vaut 43 lb (livres Avoirdupoids)
1 lb pèse 453,6 grammes

Conjointe :

X fr PRA	=>	100 kg
0,4536 kg	=>	1 lb
43 lb	=>	1 boisseau
1 boisseau	=>	15 $ PA
1 $ PA	=>	1.60 fr. PA
100 fr. PA	=>	110 fr. PRA

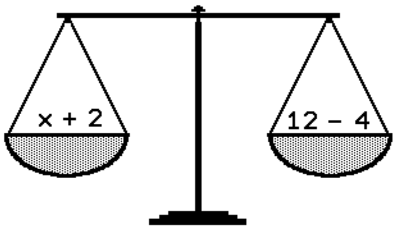
$$X = \frac{100 \times 15 \times 1{,}6 \times 110}{0{,}4536 \times 43 \times 100}$$

Méthode 5 Algèbre

Quelques notions sur les équations du premier degré à une inconnue

Définition d'une équation :

Une équation à 1 inconnue est une égalité dont les deux membres ne sont égaux que pour la (ou les) valeurs particulières attribuées à la lettre x appelée inconnue.

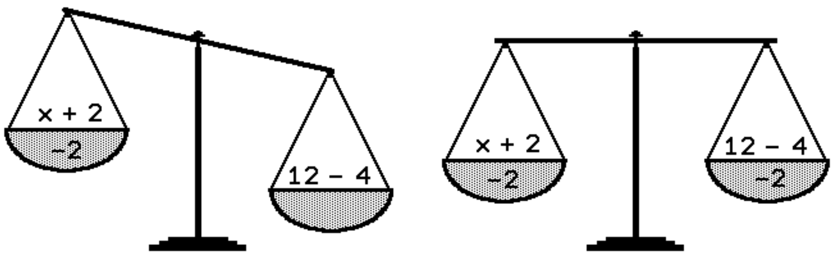


Equation : x + 2 = 12 – 4

Cette équation n´est vérifiée que si x vaut ...

Pour résoudre une équation (trouver la valeur de x) il faut connaître les deux théorèmes d'équivalence suivants :

Théorème no 1 : *L'équation obtenue en ajoutant (ou en soustrayant) aux deux membres d'une équation une même quantité, est équivalente à la première.*



moins 2 à gauche = déséquilibre   moins 2 des deux côtés = équilibre maintenu

Exemple : si l'on retranche 2 des deux membres, les équations seront équivalentes (l'équilibre ne sera pas rompu !)

Equation 1 : $x + 2 = 8$
Equation 2 : $x = 6$

Théorème no 2 : *L'équation obtenue en multipliant ou en divisant les deux membres d'une équation par une même quantité, est équivalente à la première.*

Exemple : si l'on multiplie les 2 membres par 3, les équations seront équivalentes.

Equation 1 : $x + 2 = 12 - 4$
Equation 2 : $3x + 6 = 36 - 12$

Marque à suivre pour résoudre un problème par l'algèbre :

a) Déterminer l'inconnue x.
b) Poser le problème sous forme d'équation (égalité).

c) Utiliser les théorèmes d'équivalence pour isoler les x dans l'un des membres puis calculer la valeur de 1x.
d) Enoncer la solution.

Application au problème des oeufs :

a) x = valeur d'un oeuf

b) 12x = 6.50 | 12 oeufs = fr. 6.50

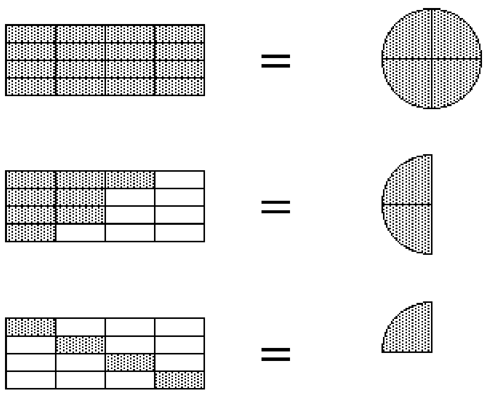
c) 12x : 12 = 6.50 : 12 | division des 2 membres par 12
x = 0.541666

d) Réponse : 17 oeufs valent 17 x 0.541666 soit env. fr. 9.20

Méthode 6 Les parties aliquotes d'un nombre

Tout nombre contenu exactement dans un autre est une partie aliquote de ce dernier.

Ainsi, 4 est partie aliquote de 16 parce que 16 contient 4 exactement 4 fois !



La méthode des parties aliquotes peut être utilisée en calcul mental pour résoudre des problèmes simples de calculs d'intérêts ou de pourcentages.

Exemple : Un capital à rapporté fr. 4.40 d'intérêt en 6 jours. Combien rapporte-t-il en 135 jours ?

6 jours pour fr. 4.40 d'où :

60 jours	=	fr.	44.--
60 jours	=	fr.	44.--
6 jours	=	fr.	4.40
6 jours	=	fr.	4.40
3 jours	=	fr.	2.20
135 jours	=	fr.	99.--
========		===========	

EXERCICES :

1. Vérifier les proportions :

$$\frac{85}{17} = \frac{5}{1} \qquad \frac{12}{14} = \frac{72}{84} \qquad \frac{2,5}{6} = \frac{8}{19} \qquad \frac{144}{192} = \frac{126}{168} \qquad \frac{0.4}{0.6} = \frac{14}{22.5}$$

2. Ecrire les quatre proportions qu'on peut former avec les nombres : 3; 4; 6; 8.

3. Un ouvrier reçoit fr. 1'500.– pour 11 jours de travail. Quel sera son salaire :
   a) pour 1 journée ?
   b) pour 25 jours ?
   c) pour 300 jours ?

4. Un avion parcourt la distance Blécherette – Bâle, soit 125 km en 25 mn.
   Quelle est sa vitesse horaire ?
   Quelle sera la durée du vol Lausanne – Zurich, la distance de ces deux villes étant de 160 km ?

5. Une barrique de vin de 210 l a coûté fr. 197.40.
   Quel sera le prix d'un tonneau de 100 l ?

6. 1 kg de boeuf vaut à Evian FF 135.–, à Lausanne FS 40.–. Sachant que 4.25 FF valent 1 FS, quel est le gain en FS pour un achat en France ?

7. Une fontaine qui débite 12,5 l/mn remplit un bassin en 48 mn.
   Quel temps mettrait une fontaine débitant 9,6 l(mn pour remplir le même bassin ?
   Quel serait le débit d'une fontaine qui remplirait le bassin en 75 mn ?

8. En roulant à 80 km/h on a mis 2h30mn pour aller de A à B.
   Combien de temps aurait-on mis si l'on pouvait rouler à 100 km/h ?

9. Un importateur achète du mazout 3.– $ le baril à New York.
   Quel sera le prix en FS de 5'000 l ?
   (1 baril = 158,984 l) – (1$ = 1.30 FS)

10. Enonce un problème de proportionnalité que tu as rencontré ?

Combinaisons de grandeurs proportionnelles et de grandeurs inversement proportionnelles

Exemples :

1. Dans une filature de laine, 5 machines ont fabriqué 3150 kg de laine peignée en travaillant 8 3/4 h. par jour pendant 6 jours.
Combien d'heures par jour 4 machines devraient-elles travailler pour produire 2280 kg en 5 jours ?

2. Une compagnie de taxis dispose de 8 voitures, qui roulent 15 heures par jour et sont conduites par 12 chauffeurs.
Elle désire :
- supprimer un véhicule;
- augmenter la durée de service de chaque véhicule de 3 heures;
- diminuer la durée du travail de chaque chauffeur de 1 heure.

De combien d'employés aura-t-elle besoin ?

Solutions :

1.

nb de machines	kg fabriqués	nb d'heures par jour	nb de jours
5	3150	8.75	6
4	2280	?	5

Plus il y a de machines, plus elles produisent.
Proportion directe

Plus il y a de kg à fabriquer, plus il faut travailler d'heures par jour.
Proportion directe

Plus les machines travaillent d'heures par jour, moins il faut de jours.
Proportion inverse

Calcul : $$\frac{5 \times 2280 \times 8.75 \times 6}{4 \times 3150 \times 5} = 9.5 \text{ heures}$$

2.

nb de taxis	nb. h./j. par taxi	nb chauffeurs	nb. h./j. par chauffeur
8	15	12	10
7	18	?	9

Moins il y a de véhicules, plus ils doivent rouler d'heures par jour.
Proportion inverse

Plus les taxis roulent, plus il faut de chauffeurs..
Proportion directe

Plus il y a de chauffeurs, moins ils doivent travailler.
.
Proportion inverse

Calcul : $$\frac{7 \times 18 \times 12 \times 10}{8 \times 15 \times 9} = 14 \text{ chauffeurs}$$